37　定積分で表された関数

316

(1)

$a=\int_0^1 tf(t-1)dt$ とおくと，$f(x)=ax+1$

よって，

$$\begin{aligned} f(x)&=1+x\int_0^1 tf(t-1)dt \\ &=1+x\int_0^1 t\{a(t-1)+1\}dt \\ &=1+x\int_0^1 \{at^2-(a-1)t\}dt \\ &=1+x\left[\frac{a}{3}t^3-\frac{a-1}{2}t^2\right]_0^1 \\ &=\frac{-a+3}{6}x+1 \end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{-a+3}{6}x+1$ と $f(x)=ax+1$ を係数比較すると，$\dfrac{-a+3}{6}=a$　$\therefore a=\dfrac{3}{7}$

$\therefore f(x)=\dfrac{3}{7}x+1$

(2)

与式より，$F'(x)=ax^2+bx+c$　・・・①

条件より，$F'(x)=a(x+1)(x-3)$　$\therefore F'(x)=ax^2-2ax-3a$　・・・②

①と②を係数比較することにより，$b=-2a$　・・・③　$c=-3a$　・・・④

また，④より，

$$\begin{aligned} F(x)&=\int_0^x (at^2+bt+c)dt+d \\ &=a\int_0^x (t^2-2t-3)dt+d \\ &=a\left[\frac{t^3}{3}-t^2-3t\right]_0^x+d \\ &=\frac{a}{3}x^3-ax^2-3ax+d \end{aligned}$$

よって，

$F(-1)=\dfrac{17}{3}$ より，$\dfrac{5}{3}a+d=\dfrac{17}{3}$　・・・⑤

$F(3)=-5$ より，$-9a+d=-5$　・・・⑥

⑤，⑥の連立方程式を解くと，$a=1,\ d=4$

これと④より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ -2,\ -3,\ 4)$

(3)

$$与式=\int_{-1}^{1}\left\{x^4+2px^3+\left(p^2-2q\right)x^2-2pqx+q^2\right\}dx$$
$$=2\int_{0}^{1}\left\{x^4+\left(p^2-2q\right)x^2+q^2\right\}dx$$
$$=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{p^2-2q}{3}\cdot x^3+q^2x\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{15}\left(5p^2+15q^2-10q+3\right)$$
$$=\frac{2}{15}\left\{5p^2+15\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\right\}$$

よって，　$p=0$，　$q=\dfrac{1}{3}$

317

(1)

$0\le t\le x\le t+1\le 2$ より，　$\left|x(x-2)\right|=-x(x-2)=-x^2+2x$

$$\therefore f(t)=\int_t^{t+1}\left|x(x-2)\right|dx$$
$$=\int_t^{t+1}\left(-x^2+2x\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_t^{t+1}$$
$$=-t^2+t+\frac{2}{3}$$

(2)

$1<t\le 2$，　$2<t+1\le 3$ より，

$t\le x\le 2$ で $\left|x(x-2)\right|=-x^2+2x$，　$2\le x\le t+1$ で $\left|x(x-2)\right|=x^2-2x$

$$\therefore f(t)=\int_t^{t+1}\left|x(x-2)\right|dx$$
$$=\int_2^{t+1}\left(x^2-2x\right)dx+\int_t^{2}\left(-x^2+2x\right)dx$$
$$=\int_2^{t+1}\left(x^2-2x\right)dx+\int_2^{t}\left(x^2-2x\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^{t+1}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^{t}$$
$$=\frac{2}{3}t^3-t^2-t+2$$

(3)

(i) $0 \le t \le 1$ のとき

$$f(t) = -t^2 + t + \frac{2}{3}$$
$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{12}$$

よって，$t = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{11}{12}$，$t = 0,\ 1$ で最小値 $\frac{2}{3}$ をとる。

(ii) $1 < t \le 2$ のとき

$f(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2$ より，$f'(t) = 2t^2 - 2t - 1$

よって，$1 < t \le 2$ における $f'(t) = 0$ すなわち $2t^2 - 2t - 1 = 0$ の解は，

解の公式より，$t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

よって，$1 < t \le 2$ における $f(t)$ の増減は次表のようになる。

t	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	/	$\downarrow$	極小	$\uparrow$	$\frac{4}{3}$

$f(t)$ はすべての実数 t で連続かつ $\lim_{t \to 1+0} f(t) = \frac{2}{3}$

よって，$t = 2$ で最大値 $\frac{4}{3}$ をとる。

また，$f(t)$ は $t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ で最小値をとり，$t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ が $2t^2 - 2t - 1 = 0$ を満たすことから，

$$f(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2$$
$$= \frac{1}{6}(4t^3 - 6t^2 - 6t + 12)$$
$$= \frac{1}{6}\{(2t^2 - 2t - 1)(2t - 1) - 6t + 11\}$$

より，

最小値は $f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(-6 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 11\right) = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{6}$

(i)，(ii)より，$t = 2$ で最大値 $\frac{4}{3}$，$t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $\frac{8-3\sqrt{3}}{6}$ をとる。

318

解法 1

$f(x)$ の最高次の項を ax^n とすると，

与式右辺すなわち $\int_0^x tf(t)dt$ の最高次の項は $\dfrac{a}{n+2}x^{n+2}$

また，左辺を展開したときの $x^2 f(x)$ の最高次の項は ax^{n+2}

(i) $n>2$ のとき

$n+2>4$ より，左辺の最高次の項は ax^{n+2}

左辺と右辺は恒等式だから，最高次の項の係数について，$a=\dfrac{a}{n+2}$　$\therefore n=-1$

これは $f(x)$ が x の整式であるという条件を満たさない。よって，不適。

(ii) $n=2$ のとき

$n+2=4$ より，左辺の最高次の項は $(a+1)x^4$

(i)と同様にして，$a+1=\dfrac{a}{2+2}$　$\therefore a=-\dfrac{4}{3}$

(iii) $n<2$ のとき

$n+2<4$ より，左辺の次数は 4

ところが，右辺の次数は $n+2$

よって，不適。

(i)～(iii)より，$f(x)$ の次数は 2

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= x^4+2x^3+\{f(x)+4\}x^2 \\
&= (a+1)x^4+(b+2)x^3+(c+4)x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int_0^x tf(t)dt \\
&= \int_0^x (at^3+bt^2+ct)dt \\
&= \left[\frac{a}{4}t^4+\frac{b}{3}t^3+\frac{c}{2}t^2\right]_0^x \\
&= \frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2
\end{aligned}
$$

より，$a+1=\dfrac{a}{4}$ かつ $b+2=\dfrac{b}{3}$ かつ $c+4=\dfrac{c}{2}$

よって，$a=-\dfrac{4}{3}$，$b=-3$，$c=-8$

ゆえに，$f(x)=-\dfrac{4}{3}x^2-3x-8$

解法 2　数学Ⅲ?

与式左辺を x で微分すると，

$$4x^3+6x^2+\{f(x)+4\}'x^2+\{f(x)+2\}(x^2)'=4x^3+6x^2+x^2f'(x)+2xf(x)+4x$$

与式右辺を x で微分すると，$xf(x)$

よって，$x^2f'(x)+2xf(x)+4x^3+6x^2+4x=xf(x)$　・・・①　となり，

与式が恒等式ならば①も恒等式である。

そこで，$f(x)$ の最高次の項を ax^n とし，①が恒等式となるように解法 1 と同様にして解けばよい。

319

$$\text{与式左辺}=\int_0^x f(y)dy+\int_0^1(x^2+2xy+y^2)f(y)dy$$
$$=\int_0^x f(y)dy+x^2\int_0^1 f(y)dy+2x\int_0^1 yf(y)dy+\int_0^1 y^2f(y)dy$$

より，$\int_0^x f(y)dy+x^2\int_0^1 f(y)dy+2x\int_0^1 yf(y)dy+\int_0^1 y^2f(y)dy=x^2+C$　・・・①

①の両辺を x で微分すると，$f(x)+2x\int_0^1 f(y)dyx+2\int_0^1 yf(y)dy=2x$　・・・②

①は恒等式だから，②も恒等式である。

よって，②の左辺と右辺の次数が等しいから，$f(x)$ の次数は 1

そこで，$f(x)=ax+b$ とおき，これを①に代入すると，

②の左辺は

$$f(x)+2x\int_0^1 f(y)dyx+2\int_0^1 yf(y)dy=ax+b+2x\left[\frac{a}{2}y^2+by\right]_0^1+2\left[\frac{a}{3}y^3+\frac{b}{2}y^2\right]_0^1$$
$$=ax+b+2x\left(\frac{a}{2}+b\right)+2\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$$
$$=2(a+b)x+\frac{2}{3}a+2b$$

となるから，②は $2(a+b)x+2\left(\frac{1}{3}a+b\right)=2x$ と表される。

この恒等式を係数比較することにより，連立方程式 $\begin{cases}a+b=1\\ \frac{1}{3}a+b=0\end{cases}$ が得られ，

これを解くと，$(a,\ b)=\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

よって，$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

①に $x=0$ を代入すると，$C=\int_0^1 y^2 f(y)dy$

これと，$f(y)=\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2}$ より，

$$
\begin{aligned}
C&=\int_0^1\left(\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)dy\\
&=\left[\frac{3}{8}y^4-\frac{1}{6}y^3\right]_0^1\\
&=\frac{5}{24}
\end{aligned}
$$

320

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1\le x\le 0)\\ 3x+1 & (0\le x\le 1)\end{cases}$　より，

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1\{f(x)-(a|x|+b)\}^2dx&=\int_0^1\{3x+1-(ax+b)\}^2dx+\int_{-1}^0\{x+1-(-ax+b)\}^2dx\\
&=\int_0^1\{-(a-3)x-(b-1)\}^2dx+\int_{-1}^0\{(a+1)x-(b-1)\}^2dx\\
&=\int_0^1\left\{(a-3)^2x^2+2(a-3)(b-1)x+(b-1)^2\right\}dx\\
&\qquad+\int_{-1}^0\left\{(a+1)^2x^2-2(a+1)(b-1)x+(b-1)^2\right\}dx\\
&=\left[\frac{(a-3)^2}{3}x^3+(a-3)(b-1)x^2+(b-1)^2x\right]_0^1\\
&\qquad+\left[\frac{(a+1)^2}{3}x^3-(a+1)(b-1)x^2+(b-1)^2x\right]_{-1}^0\\
&=\frac{(a-3)^2}{3}+(a-3)(b-1)+(b-1)^2-\left\{-\frac{(a+1)^2}{3}-(a+1)(b-1)-(b-1)^2\right\}\\
&=\frac{1}{3}\left(2a^2+6ab+6b^2-10a-18b+22\right)\\
&=\frac{1}{3}\left[2\left\{a^2+(3b-5)a\right\}+6b^2-18b+22\right]\\
&=\frac{1}{3}\left\{2\left(a+\frac{3b-5}{2}\right)^2+\frac{3}{2}(b-1)^2+8\right\}
\end{aligned}
$$

よって，$b=1,\ a=-\dfrac{3b-5}{2}$　すなわち $a=b=1$ で最小値 $\dfrac{8}{3}$ をとる。

321

(1)

$\left\{\int_0^2 f(t)dt\right\}^2 = k$ とおくと，与式より，$f(x)=\dfrac{3}{a}x^2-\dfrac{1}{a}x+k$　・・・①

よって，

$$
\begin{aligned}
f(0)&=\left\{\int_0^2 f(t)dt\right\}^2\\
&=\left\{\int_0^2\left(\frac{3}{a}t^2-\frac{1}{a}t+k\right)dt\right\}^2\\
&=\frac{1}{a^2}\left\{\int_0^2\left(3t^2-t+ak\right)dt\right\}^2\\
&=\frac{1}{a^2}\left(\left[t^3-\frac{1}{2}t^2+akt\right]_0^2\right)^2\\
&=\frac{4}{a^2}(ak+3)^2
\end{aligned}
$$

①より，$f(0)=k$ だから，$k=\dfrac{4}{a^2}(ak+3)^2$

この両辺に a^2 を掛け，これを整理し，k の 2 次方程式にすると，

$4a^2k^2-\left(a^2-24a\right)k+36=0$　・・・②

条件より，k は重解をもつから，判別式を D とすると，$D=0$

これと，

$$
\begin{aligned}
D&=\left(a^2-24a\right)^2-4\cdot 4a^2\cdot 36\\
&=\left(a^2-24a\right)-(24a)^2\\
&=\left\{\left(a^2-24a\right)+24a\right\}\left\{\left(a^2-24a\right)-24a\right\}\\
&=a^3(a-48)
\end{aligned}
$$

より，$a^3(a-48)=0$

a は 0 でない実数だから，$a=48$

(2)

$\left\{\int_0^2 f(t)dt\right\}^2 = l$ とおくと，$f(x)=\frac{3}{a}x^2-\frac{1}{a}x+l$ より，

$$\int_0^b \{f(x)-f(b)\}dx=\int_0^b\left\{\left(\frac{3}{a}x^2-\frac{1}{a}x+l\right)-\left(\frac{3}{a}b^2-\frac{1}{a}b+l\right)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{a}-\frac{x^2}{2a}-\left(\frac{3}{a}b^2-\frac{b}{a}\right)x\right]_0^b$$
$$=\frac{-4b^3+b^2}{2a}$$
$$=\frac{-b^2(4b-1)}{2a}$$

この値が a によらないならば $b^2(4b-1)=0$

b は正の実数だから，$b=\frac{1}{4}$

(3)

$a=48$ のとき②は重解をもつから，その重解を α とすると，解と係数の関係より，

$$2\alpha=\frac{a^2-24a}{4a^2}$$
$$=\frac{a-24}{4a}$$
$$=\frac{48-24}{4\cdot 48}$$
$$=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{16}$$

したがって，

$$f(x)=\frac{3}{48}x^2-\frac{1}{48}x+\frac{1}{16}$$
$$=\frac{1}{48}(3x^2-x+3)$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{4}}^2 f(x)dx=\frac{1}{48}\int_{\frac{1}{4}}^2(3x^2-x+3)dx$$
$$=\frac{1}{48}\left[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{\frac{1}{4}}^2$$
$$=\frac{721}{3072}$$

322

(1)

$f_0(0)=0$ より，$f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt+1=\int_0^x tdt+1=\frac{1}{2}x^2+1$

$f_1(0)\neq 0$ より，$f_2(x)=\frac{d}{dx}f_1(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=x$

同様にして，$f_3(x)=\frac{1}{2}x^2+1$，$f_4(x)=x$

(2)

$f_0(0)=0$ と仮定すると，$f_1(x)=\int_0^x f_0(x)dx+1$ より，$f_1(0)=\int_0^0 f_0(x)dx+1=1$

これは，$f_1(x)=0$ に反する。

よって，$f_0(0)\neq 0$

ゆえに，$f_1(x)=\frac{d}{dx}f_0(x)$　すなわち $0=\frac{d}{dx}f_0(x)$

この両辺を不定積分することにより，$f_0(x)=C$（C は積分定数）

よって，$f_0(x)$ は定数である。

(3)

(2)より，$f_2(x)=0$ ならば $f_1(x)$ は定数であるから，$f_1(x)=C_1$ とすると，

$f_0(0)\neq 0$ のとき

$$C_1=\frac{d}{dx}f_0(x)$$

両辺を不定積分することにより，$f_0(x)=C_1x+C_2$（C_2 は積分定数）

$f_0(0)=0$ のとき

$$C_1=\int_0^x f_0(t)dt+1$$

両辺を x で微分することにより，$f_0(x)=0$

これは $f_0(x)=ax+b$ で $a=b=0$ のときの式である。

よって，$f_2(x)=0$ ならば $f_0(x)=ax+b$（a，b は定数）と表される。